2de 8	Devoir en temps libre n°2	à remettre le

Thème d'étude n° 1 : problème historique sur le nombre $\sqrt{2}$

Un peu d'histoire …

Le calcul exact de $\sqrt{2}$ est un problème historique important pour les mathématiciens et philosophes grecs. La découverte de cette «quantité irrationnelle» est attribuée aux pythagoriciens. Des historiens racontent que ces pythagoriciens auraient voulu tenir secrète cette découverte :

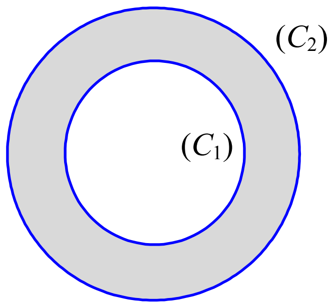
«On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret :
ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues.» (Proclus)

On trouve dans Aristote une preuve de **l'irrationalité** de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire du fait que le nombre dont le carré est 2 n'est égal à aucune fraction.

Partie A

1. Soit un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que AB = 1.
   Calculer BC.

2. Soit deux cercles concentriques (C_1) et (C_2) de rayons respectifs r_1 et r_2.
   On suppose que l'aire de la couronne délimitée par les deux cercles est égale à l'aire du disque de frontière (C_1).
   Calculer le rapport $\dfrac{r_2}{r_1}$



Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire de démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec p et q des nombres entiers naturels non nuls.

Pour cela, effectuons « un raisonnement par l'absurde » à savoir :
si on suppose que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec p et q nombres entiers naturels non nuls alors on doit aboutir à une contradiction.

On pose $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction $\dfrac{p}{q}$ irréductible.

1. Démontrer que $p^2 = 2\,q^2$.
2. a. Suivant le chiffre des unités de p, quel est le chiffre des unités de p^2 ? (faire un tableau).
   b. Suivant le chiffre des unités de q, quel est le chiffre des unités de $2\,q^2$? (faire un tableau).
3. a. D'après l'égalité $p^2 = 2\,q^2$, quelle est la seule possibilité pour le chiffre des unités de p^2 ?
   b. Dans ce cas, quel est le chiffre des unités de p ? quelles sont les possibilités pour le chiffre des unités de q ?
   La fraction $\dfrac{p}{q}$ est-elle alors irréductible ?
   c. Conclure.