

Quadrature du cercle

Il s'agit de l'un des plus célèbres problèmes de la géométrie. Il a obsédé les mathématiciens durant plus de 2000 ans.

Le problème a été posé par les mathématiciens grecs de l'Antiquité. La « quadrature » d'une surface donnée consiste à construire un carré dont l'aire est égale à celle de cette surface.

La quadrature du cercle de rayon 1, par exemple, consiste donc à construire un carré dont l'aire est égale à celle de ce cercle.

Ce n'est qu'à la fin du XIX^e siècle, grâce aux travaux du mathématicien allemand Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939), que sera enfin démontrée l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Un mathématicien Indien, Srinivasa Ramanujan, a proposé une solution approchée au problème de la quadrature du cercle, problème qui n'a pas de solution exacte.

Partie A

Selon les instructions de Srinivasa Ramanujan, réaliser avec soin les constructions suivantes sur une feuille blanche (une feuille quadrillée n'est pas autorisée).

Tracer un cercle Γ (lire gamma) de rayon l'unité (on choisira 6 cm pour unité).

Soit $[AB]$ un diamètre de ce cercle et O son centre.

Sur le segment $[OB]$ placer le point C tel que $OC = \frac{2}{3} OB$ et le point H milieu du segment $[AO]$.

Dans l'un des demi-plans de frontière (AB) , placer les quatre points suivants :

D l'intersection de Γ avec la perpendiculaire en C à (AB)

E le point de Γ tel que $BE = CD$

O' et C' les projetés orthogonaux de O et de C sur la droite (AE) .

Dans l'autre demi-plan de frontière (AB) , placer les quatre points suivants :

F le point de Γ tel que $AF = AO'$

G le point sur la tangente en A à Γ tel que $AG = O'C'$

I le point de $[BF]$ tel que $BI = BH$

J le point d'intersection de (BG) avec la parallèle à (GF) passant par I .

Finir la construction en traçant le carré de côté $[BJ]$ dans le demi-plan de frontière (AB) contenant le point G .

Partie B

1. Calculer la valeur exacte de BJ (on rappelle que $OA = 1$) : tous les calculs seront détaillés et on donnera la valeur exacte de chaque résultat.

2. Comparer l'aire du carré de côté $[BJ]$ au nombre π .