

Exercice 1

$$1,3 \notin \mathbb{Z} \qquad -4 \notin \mathbb{N} \qquad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

$$\frac{2}{5} \in \mathbb{Q} \qquad 6,2 \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

1. Ecriture de A, B, C et D sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{7}{2} - 1\right) = \left(\frac{6}{10} + \frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{2}\right) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{7}{4}$$

$$B = \frac{35}{99} \times \frac{22}{15} \times \frac{9}{28} = \frac{5 \times 7 \times 2 \times 11 \times 9}{9 \times 11 \times 3 \times 5 \times 4 \times 7} = \frac{1}{6}$$

$$C = \frac{2 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{6}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{12}{6} - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{6}} = \frac{7}{3} \times \frac{6}{7} = 2$$

$$D = \frac{(3^2)^5}{3^8 \times 3^4} = \frac{3^{10}}{3^{12}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

2. Ecriture de E sous la forme $2^n \times 3^m \times 5^p$:

$$E = \frac{10^2 \times 6^3}{15^4} = \frac{(2 \times 5)^2 \times (2 \times 3)^3}{(3 \times 5)^4} = \frac{2^2 \times 5^2 \times 2^3 \times 3^3}{3^4 \times 5^4} = \frac{2^5 \times 5^2 \times 3^3}{3^4 \times 5^4} = 2^5 \times 3^{-1} \times 5^{-2}$$

3. a. Ecriture scientifique de G et de H :

$$G = 4200 \times 10^6 = 4,2 \times 10^3 \times 10^6 = 4,2 \times 10^9$$

$$H = 0,04 \times 10^{-5} = 4 \times 10^{-2} \times 10^{-5} = 4 \times 10^{-7}$$

b. Ecriture scientifique du nombre $G \times H$:

$$G \times H = 4,2 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-7} = 16,8 \times 10^2 = 1,68 \times 10^3.$$

4. Ecriture de J sous la forme $a\sqrt{3}$:

$$J = \sqrt{12} + 2\sqrt{48} - 5\sqrt{27} = \sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{16 \times 3} - 5\sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$$

Exercice 3

1. Voir la figure de l'annexe 2.

2. a. Exprimons le vecteur $\overrightarrow{KM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{KM} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

b. Démontrons que $\overrightarrow{KE} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{KE} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{KE} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

c. Alignement des points K, M et E.

$$\overrightarrow{KM} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KE} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{KE} = 2\overrightarrow{KM}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont colinéaires de même origine donc les points K, M et E sont alignés.

d. Particularité du point M :

Comme $\overrightarrow{KE} = 2\overrightarrow{KM}$, M est le milieu du segment [KE].

3. b. Exprimons le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

c. Les droites (IK) et (AN) sont-elles parallèles ? justifier.

$$\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{AN}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc les droites (IK) et (AN) sont parallèles.

Exercice 4

On donne $A = 360$ et $B = 1500$

1. Décomposition de A et de B en un produit de facteurs premiers.

$$A = 2^3 \times 3^2 \times 5 \quad \text{et} \quad B = 2^2 \times 3 \times 5^3.$$

2. a. Décomposition de C en un produit de facteurs premiers.

$$C = A \times B = (2^3 \times 3^2 \times 5) \times (2^2 \times 3 \times 5^3) = 2^5 \times 3^3 \times 5^4 \quad \text{d'où} \quad C = 2^5 \times 3^3 \times 5^4$$

b. Simplification de $\frac{A}{B}$ sous forme de fraction irréductible.

$$\frac{A}{B} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 5^3} = \frac{2 \times 3}{5^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{B} = \frac{6}{25}.$$

c. Le plus petit entier naturel n tel que $A \times n$ est le cube d'un nombre entier naturel est :

$$n = 3 \times 5^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad n = 75.$$

$$A \times n = (2^3 \times 3^2 \times 5) \times (3 \times 5^2) = 2^3 \times 3^3 \times 5^3 = (2 \times 3 \times 5)^3 = 30^3$$

Exercice 5

1. La liste des dix premiers nombres entiers premiers est : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

2. Le nombre 907 est un nombre premier, en effet :

$$\sqrt{907} \approx 30,1$$

907 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29 donc 907 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{907}$.

Annexe 2

